Lycée Laymoune — Niveau : 2ème Bac PC

★ Devoir n° 1 ★ Modèle n° 1

// 2022-2021 // ▸ Semestre ①

EX.1

① Calculer les limites :

ⓐ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{2x - 4}$; ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{2/5} - x^{8/3} \right)$

② Comparer $\alpha = \sqrt[5]{2}$ et $\beta = \sqrt[3]{9}$

③ Simplifier : $\lambda = \dfrac{\sqrt[10]{9\sqrt{9}} \times \sqrt[6]{27}}{\sqrt[5]{81}}$

④ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(E) : \sqrt[5]{3x-6} - 2 \geq 0$

$(F) \quad (2x-4)^3 + 8 = 0$

⑤ Montrer que l'équation : $x^3 + 8x^2 - 4x - 4 = 0$ admet au moins une solution dans $]-1;0[$

EX.2 Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - \sqrt{x-1} \ ; \ x > 1 \\ f(x) = \sqrt{5-x} \ ; \ x \leq 1 \end{cases}$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

1°/ Montrer que f est définie à gauche et à droite en $x_0 = 1$.

2°/-a) étudier la continuité de f à gauche et à droite en $x_0 = 1$? (justifier)

2°-b) f est-elle continue en $x_0 = 1$? (justifier)

2°-c) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (justifier)

3°-a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$

3°-b) Calculer $f'_g(1)$ et déterminer une équation de la demi-tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

3°-c) f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (justifier).

4°) Soit h la restriction de f à l'intervalle : $I =]-\infty; 1]$

4°-a) Mq h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J

4°-b) Déterminer J puis $h^{-1}(x)$ en fonction de x.

5°a) Calculer $h(0)$; 5°-b) Mq h^{-1} est dérivable en $x_0 = \sqrt{5}$ et calculer $(h^{-1})'(\sqrt{5})$ (on donne : $h'(0) = \dfrac{-1}{2\sqrt{5}}$)

— ★ ★ fin ★ ★ —

2ème Bac - Science — Modèle .1

Correction du D.S [modèle] n°1

EX.1 ① ⓐ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{2x-4}$

directement on trouve : " $\frac{\sqrt[3]{8}-2}{4-4} = \frac{0}{0}$ " (F.I)

on a :

$$\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{2x-4} = \frac{(\sqrt[3]{4x})^3-(2)^3}{(2x-4)\left((\sqrt[3]{4x})^2+2\sqrt[3]{4x}+(2)^2\right)}$$

$$= \frac{4x-8}{(2x-4)\left((\sqrt[3]{4x})^2+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}$$

$$= \frac{2(2x-4)}{(2x-4)\left(\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4\right)}$$

donc :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{\sqrt[3]{4x}^2+2\sqrt[3]{4x}+4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{8}^2+2\sqrt[3]{8}\ 4} = \frac{2}{4+4+4} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ⓑ $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{2/5} - x^{8/3}\right)$

directement on trouve : " $+\infty-(+\infty)$ " (F.I)

on a : $\frac{2}{5} < 1 < \frac{8}{3}$ donc : $\frac{2}{5} < \frac{8}{3}$

on factorise par $x^{2/5}$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2/5} - x^{8/3} = \lim_{x\to+\infty} x^{2/5}\left(1-\frac{x^{8/3}}{x^{2/5}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{2/5}\left(1-x^{\frac{8}{3}-\frac{2}{5}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{2/5}\left(1-x^{\frac{34}{15}}\right) = \boxed{-\infty}$$

car : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^{2/5} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \left(1-x^{34/15}\right) = -\infty \end{cases}$

② $\alpha = \sqrt[5]{2}$; $\beta = \sqrt[3]{9}$

on a : $5\times3 = 15$ (multiple de 3 et 5)

$$\alpha^{15} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^{15} = \left(\sqrt[5]{2}^{\,5}\right)^3 = 2^3$$

$$\beta^{15} = \left(\sqrt[3]{9}\right)^{15} = 9^5$$

on a : $2^3 < 9^3 < 9^5$

donc : $\alpha^{15} < \beta^{15}$

ce qui donne : $\boxed{\alpha < \beta}$.

③ $\lambda = \frac{\sqrt[10]{9\sqrt{9}} \times \sqrt[6]{27}}{\sqrt[5]{81}}$

on a :

$9\sqrt{9} = 3^2\times 3 = 3^3$ donc : $\sqrt[10]{9\sqrt{9}} = \sqrt[10]{3^3}$

$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{9\times3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[2\times3]{3^3} = \sqrt[2]{3^1}$

$\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{3^4}$. donc :

$$\lambda = \frac{\sqrt[10]{3^3}\times\sqrt[2]{3^1}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{3^{\frac{3}{10}}\times3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}} = 3^{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}-\frac{4}{5}}$$

$$= 3^{\frac{3}{10}+\frac{5}{10}-\frac{8}{10}} = 3^{\frac{0}{10}} = 3^0 = \boxed{1}$$

④ $(E) : \sqrt[5]{3x-6} - 2 \geq 0$

(on cherche tout d'abord D_E l'ensemble de définition de (E))

$x \in D_E \iff 3x-6 \geq 0 \iff 3x \geq 6$

$\iff x \geq \frac{6}{3} = 2 \iff x \in [2;+\infty[$

donc : $\boxed{D_E = [2;+\infty[}$

Soit $x \in D_E$, on a :

$(E) \iff \sqrt[5]{3x-6} \geq 2$

$\iff \sqrt[5]{3x-6}^{\,5} \geq 2^5 \iff 3x-6 \geq 32$

$(E) \iff 3x \geq 32 + 6 \text{ "}(= 38)\text{"}$

$\iff x \geq \frac{38}{3}$

donc : $\left(x \in D_E \text{ et } x \geq \frac{38}{3}\right)$

c.à.d : $\left(x \geq 2 \text{ et } x \geq \frac{38}{3}\right)$

donc : $x \geq \frac{38}{3}$ "car $\frac{38}{3} > 2$"

L'ensemble des solutions :

$$S_E = \left[\frac{38}{3} ; +\infty\right[$$

L'équation : $(2x-4)^3 + 8 = 0$

$\iff (2x-4)^3 = -8$

$\iff -(2x-4)^3 = 8$

$\iff (4-2x)^3 = 8$ et $4-2x \geq 0$

$\iff \begin{cases} 4-2x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \text{et } 2 \geq x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x = 2-4 \\ x \leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$ et comme $1 \leq 2$

donc $x = 1$ est bien une solution

donc ; l'ensemble des solutions :

$$S_F = \{1\}$$

Req : $x^3 = y \iff x = \sqrt[3]{y}$

(5) soit : $f(x) = x^3 + 8x^2 - 4x - 4$

- f est continue sur $[-1; 0]$ car c'est une fct polynôme
- $f(0) = -4 < 0$

$f(-1) = (-1)^3 + 8(-1)^2 - 4(-1) - 4$ **2**

$= -1 + 8 + 4 - 4$

$= 7 > 0$

donc : $f(-1) \times f(0) < 0$

d'après le T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]-1; 0[$

EX.2

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - \sqrt{x-1} \ ; \ x > 1 \\ f(x) = \sqrt{5-x} \ ; \ x \leq 1 \end{cases}$$

1°/ Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$

donc : $x \mapsto 3x^2 - \sqrt{x-1}$ est définie

c.à.d : f est définie sur $]1; +\infty[$

si $x \leq 1$ alors $-x \geq -1$

donc $5 - x \geq 5 - 1 = 4$

donc : $5 - x \geq 0$

donc : $x \mapsto \sqrt{5-x}$ est définie sur $]-\infty; 1]$

c.à.d f est définie sur $]-\infty; 1]$

Conclusion : f est définie sur : $]-\infty; 1] \cup]1; +\infty[= \mathbb{R}$

donc : $D_f = \mathbb{R}$

2ème Méthode :

$x \in D_f \iff (x-1 \geq 0 \text{ et } x > 1)$ ou $(5 - x \geq 0 \text{ et } x \leq 1)$

$\iff (x \geq 1 \text{ et } x > 1)$ ou $(x \leq 5 \text{ et } x \leq 1)$

$\iff (x > 1 \text{ ou } x \leq 1)$

$\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; 1] \cup]1; +\infty[$ $= \mathbb{R}$

donc : $D_f = \mathbb{R}$

2-a) Continuité à gauche en $x_0 = 1$

on a : $f(1) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

$\lim_{x \to 1^<} f(x) = \lim_{x \to 1^<} \sqrt{5-x} = 2 = f(1)$

donc f est continue à gauche en $x_0 = 1$

Continuité à droite en $x_0 = 1$:

$\lim_{x \to 1^>} f(x) = \lim_{x \to 1^>} (3x^2 - \sqrt{x-1})$

$= 3 - 0 = 3 \neq f(1)$

donc : f n'est pas continue à droite en $x_0 = 1$

2-b) f n'est pas continue en $x_0 = 1$.

justification : car $\lim_{x \to 1^>} f(x) \neq f(1)$

(c-à-d : f n'est pas continue à droite)

2-c) f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle est non continue en $x_0 = 1$.

(on dit aussi : car elle est discontinue en $x_0 = 1$)

3°- a) on a :

$\lim_{x \to 1^<} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^<} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1^<} \frac{(\sqrt{5-x})^2 - (2)^2}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)}$

$= \lim_{x \to 1^<} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)}$

$= \lim_{x \to 1^<} \frac{1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$

donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$

3-b) d'après 3°-a) on a :

$f'_g(1) = \frac{1}{4}$ (Le nombre dérivé de f à gauche en $x_0 = 1$)

Une équation de la demi-tangente :

$(T) : \begin{cases} y = f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ x \leqslant 1 \end{cases}$

$f'_g(1) = \frac{1}{4}$ et $f(1) = 2$

donc : $f'_g(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{4}(x-1) + 2$

$= \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

par suite : $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ et $x \leqslant 1$

3-c) f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. car elle est discontinue en $x_0 = 1$.

Req : Proposition :

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

f dériv sur $I \Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R}$.

Résultat : Si une fonction f n'est pas continue en x_0 ; alors elle est non dérivable en x_0.

4°) h est la restriction de f à $I =]-\infty; 1]$ donc :

$\forall x \in]-\infty; 1]$; $h(x) = \sqrt{5-x}$

4°-a) • $x \mapsto 5-x$ est continue et positive sur I

donc $h : x \mapsto \sqrt{5-x}$ est continue sur I

• h dérivable sur I et :

$(\forall x \in I)$; $h'(x) = \frac{(5-x)'}{2\sqrt{5-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} < 0$

donc h est strictement décroissante sur I

donc h admet une fct réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle $J = h(I)$

4°-b) $J = h(]-\infty; 1])$

$= [h(1); \lim\limits_{x \to -\infty} h(x)[$

$h(1) = 2$: $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{5-x} = +\infty$

(car $\lim\limits_{x \to -\infty} (5-x) = +\infty$)

donc : $J = [2; +\infty[$

on calcul $h^{-1}(x)$

Soient $x \in J = [2; +\infty[$; $y \in I =]-\infty; 1]$

on a : $h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt{5-y}$

$\Leftrightarrow x^2 = 5-y \Leftrightarrow 5-x^2 = y$

donc : $(\forall x \in [2; +\infty[)$; $h^{-1}(x) = 5-x^2$

5°-a) $h(0) = \sqrt{5-0} = \sqrt{5}$

5°-b) • **Rappel**

si $\begin{cases} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases}$ alors :

f^{-1} dériv en $f(a)$

et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

on a : $h'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$

donc : $\begin{cases} h \text{ est dérivable en } 0 \\ h'(0) \neq 0 \end{cases}$

on a : $\sqrt{5} = h(0)$ donc :

$(h^{-1})'(\sqrt{5}) = (h^{-1})'(h(0))$

$= \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}$

par suite : $(h^{-1})'(\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$

— • ★ fin ★ • —

Remarques : 2ème méthode :

3°-a) on a : $f(x) = \sqrt{5-x}$; $\forall x \leq 1$

et $5-x > 0$ pour tout $x \leq 1$

donc f dériv sur $]-\infty; 1]$

en particulier : à gauche en 1.

5-b) d'après la question 4°-b)

on a : $\forall x \in J = [2; +\infty[$; $h^{-1}(x) = 5-x^2$

donc : h^{-1} dérivable sur J (car $x \mapsto 5-x^2$ dériv sur $\mathbb{R}$)

et $(h^{-1})'(x) = (5-x^2)' = -2x$

donc : pour $x_0 = \sqrt{5}$ on a : $x_0 \in J$

et $(h^{-1})'(\sqrt{5}) = -2 \times \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$.